KRIVOLINIJSKI I POVRŠINSKI INTEGRALI

§ 1. Krivolinijski integrali po luku krive*)

Izračunavanje integrala

U zadacima 3770—3775 izračunati date krivolinijske integrale.

3770. $\int\limits_L \frac{ds}{x-y}$, pri čemu je L odsečak na pravoj $y=\frac{1}{2}x-2$, koji leži između tačaka $A(0, -2)$ i $B(4, 0)$.

3771. $\int\limits_L xy\,ds$, pri čemu je L kontura pravougaonika čija su temena $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$ i $D(0, 2)$.

3772. $\int\limits_L y\,ds$, pri čemu je L luk parabole $y^2=2px$, koji leži unutar parabole $x^2=2py$.

3773. $\int\limits_L (x^2+y^2)^n\,ds$, pri čemu je L krug $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

3774. $\int\limits_L xy\,ds$, pri čemu je L četvrtina elipse koja leži u prvom kvadrantu.

3775. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,ds$, pri čemu je L prvi svod cikloide $x=a(t-\sin t)$,

$$y=a(1-\cos t).$$

3776. Napisati obrazac za izračunavanje integrala $\int\limits_L F(x, y)\,ds$ u polarnim koordinatama, ako je kriva L zadata jednačinom $\rho=\rho(\varphi)$ $(\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2)$.

3777*. Izračunati $\int\limits_L (x-y)\,ds$, po kružnoj liniji $x^2+y^2=ax$.

3778. Izračunati $\int\limits_L \sqrt{x^2-y^2}\,ds$ po krivoj $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$ (polovina lemniskate).

3779. Izračunati $\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,ds$ po delu Arhimedove spirale $\rho=2\varphi$ koji leži unutar kruga poluprečnika R, čiji je centar u koordinatnom početku.

3780. Izračunati $\int\limits_L \frac{z^2\,ds}{x^2+y^2}$ po prvom zavoju zavojnice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$.

3781. Izračunati $\int\limits_L xyz\,ds$ po delu kružne linije $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$, koji leži u prvom oktantu.

3782. Izračunati $\int\limits_L (2z-\sqrt{x^2+y^2})\,ds$ po prvom zavoju konusne zavojnice $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$.

3783. Izračunati $\int\limits_L (x+y)\,ds$ po delu kružne linije $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, koji leži u prvom oktantu.

Primena integrala po luku krive

3784. Naći masu onog dela materijalne krive $y=\ln x$ koji leži između tačaka sa apscisama x_1 i x_2, ako je gustina krive u svakoj tački jednaka kvadratu apscise te tačke.

3785. Naći masu onog dela lančanice $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ koji leži između tačaka sa apscisama $x_1=0$ i $x_2=a$, ako je gustina krive u svakoj njenoj tački obrnuto proporcionalna ordinati tačke, pri čemu gustina u tački $(0, a)$ ima vrednost δ.

3786. Naći masu onog dela elipse $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ koji leži u provom kvadrantu, ako je gustina u svakoj tački jednaka ordinati te tačke.

3787. Naći masu prvog zavoja zavojnice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, čija je gustina u svakoj tački jednaka kvadratu odstojanja te tačke od koordinatnog početka.

3788. Naći masu luka krive $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ od tačke koja odgovara vrednosti $t=0$, do proizvoljne tačke krive, ako je gustina u svakoj tački krive obrnuto proporcionalna kvadratu odstojanja te tačke od koordinatnog početka, i u tački $(1, 0, 1)$ njena je vrednost 1.

3789. Naći koordinate težišta prvog poluzavoja zavojnice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, uzimajući da je gustina konstantna.

3790. Izračunati statički momenat prvog zavoja konusne zavojnice $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ u odnosu na ravan Oxy, ako je gustina u svakoj tački zavojnice proporcionalna kvadratu odstojanja te tačke od pomenute ravni.

3791. Izračunati momente inercije prvog zavoja zavojnice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\frac{h}{2\pi}t$.

U zadacima 3792 — 3797 izračunati površine datih cilindričnih omotača, koji leže između ravni Oxy i navedenih površina.

3792. $x^2+y^2=R^2, \quad z=R+\frac{x^2}{R}$.

3793. $y^2=2px, \quad z=\sqrt{2px-4x^2}$.

3794. $y^2=\frac{4}{9}(x-1)^3, \quad z=2-\sqrt{x}$.

3795. $x^2+y^2=R^2, \quad 2Rz=xy$.

3796. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=kx$ i $z=0$ $(z\geqslant 0)$ („cilindrična potkovica")

3797. $y=\sqrt{2px}, \quad z=y$ i $x=\frac{8}{9}p$.

3798. Izračunati površinu onog dela kružnog cilindra koji iz njega iseca drugi isti takav cilindar, ako im se ose seku pod pravim uglom a poluprečnici su im R (uporedi sa rešenjem zadatka 3642).

3799. Naći površinu onog dela cilindra $x^2+y^2=Rx$, koji leži unutar sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Po Bio-Savarovu zakonu elemenat provodnika (sa strujom) dejstvuje na magnetnu masu m silom čiji je intenzitet $\frac{mI\sin\alpha\, ds}{r^2}$, pri čemu je I — jačina struje, ds — elemenat provodnika, r — rastojanje od elementa provodnika do magnetne mase, α — ugao između elementa provodnika i prave koja spaja taj elemenat sa magnetnom masom; ta je sila normalna na ravan u kojoj leži elemenat provodnika ds i magnetna masa m, a njen smer se određuje po pravilu zavrtnja. Primenom ovog zakona rešiti zadatke 3800—3805.

3800. Naći silu kojom struja jačine I u beskonačnom pravolinijskom provodniku dejstvuje na tačkastu magnetnu masu m, koja se nalazi na odstojanju a od provodnika.

3801. Kroz provodnik koji ima oblik kvadrata sa stranicom a, prolazi struja jačine I; kolikom silom dejstvuje ona na tačkastu magnetnu masu m, koja se nalazi u centru kvadrata?

3802. Pokazati da struja, koja prolazi kroz krivolinijski provodnik čija je jednačina u polarnim koordinatama $\rho=\rho(\varphi)$, dejstvuje na tačkastu magnetnu masu m koja se nalazi u koordinatnom početku, silom

$$f=mI\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\rho}.$$

3803. Kolikom silom struja jačine I koja obrazuje zatvoreno eliptično kolo, dejstvuje na tačkastu magnetnu masu m koja se nalazi u žiži elipse?

3804. Kolikom silom struja jačine I, koja teče kroz beskonačan provodnik savijen u vidu parabole, dejstvuje na tačkastu magnetnu masu m u žiži parabole, ako rastojanje od temena do žiže iznosi $\frac{p}{2}$?

3805. Kolikom silom struja jačine I, koja obrazuje zatvoreno kružno kolo poluprečnika R, dejstvuje na tačkastu magnetnu masu m koja leži na normali podignutoj iz centra kruga, na odstojanju h od ravni kruga? Koliki mora biti poluprečnik R da bi ova sila, za datu vrednost h, bila maksimalna?

§ 2. Krivolinijski integrali po koordinatama*)

Izračunavanje integrala

U zadacima 3806 — 3821 izračunati date krivolinijske integrale.

3806. $\int\limits_L x\,dy$ po konturi trougla koji obrazuju koordinatne ose i prava $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, — u pozitivnom smeru obilaženja (tj. nasuprot kretanju satne kazaljke).

3807. $\int\limits_L x\,dy$ po odsečku prave $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, od tačke preseka sa apscisnom do tačke preseka sa ordinatnom osom.

3808. $\int\limits_L (x^2-y^2)\,dx$ po delu parabole $y=x^2$ od koordinatnog početka do tačke (2, 4).

3809. $\int\limits_L (x^2+y^2)\,dy$ po konturi četvorougla čija su temena (navedena po redu obilaženja): $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(4, 4)$ i $D(0, 4)$.

3810. $\int\limits_{(0,0)}^{(\pi,2\pi)} -x\cos y\,dx+y\sin x\,dy$ duž pravolinijskog odsečka koji spaja tačke $(0, 0)$ i $(\pi, 2\pi)$.

3811. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} xy\,dx+(y-x)\,dy$ duž krive 1) $y=x$, 2) $y=x^2$, 3) $y^2=x$, 4) $y=x^3$.

3812. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy\,dx + x^2\,dy$ duž krive 1) $y=x$, 2) $y=x^2$, 3) $y=x^2$, 4) $y^2=x$.

3813. $\int_L y\,dx + x\,dy$ po delu kruga $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, od $t_1 = 0$ do $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

3814. $\int_L y\,dx - x\,dy$ po elipsi $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, u pozitivnom smeru obilaženja.

3815. $\int_L \frac{y^2\,dx - x^2\,dy}{x^2 + y^2}$, po polukrugu $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ od $t_1 = 0$ do $t_2 = \pi$.

3816. $\int_L (2a - y)\,dx - (a - y)\,dy$ duž prvog (računajući od koordinatnog početka) svoda cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

3817. $\int_L \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, pri čemu je L deo astroide $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$ od tačke $(R, 0)$ do tačke $(0, R)$.

3818. $\int_L x\,dx + y\,dy + (x + y - 1)\,dz$ duž pravolinijskog odsečka od tačke $(1, 1, 1)$ do tačke $(2, 3, 4)$.

3819. $\int_L yz\,dx + z\sqrt{R^2 - y^2}\,dy + xy\,dz$ po zavojnici $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$, od njenog preseka sa ravni $z = 0$ do preseka sa ravni $z = a$.

3820. $\int_{(1,1,1)}^{(4,4,4)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$ duž prave linije.

3821. $\int_L y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$ duž krive po kojoj se seku sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ i cilindar $x^2 + y^2 = Rx$ $(R > 0,\ z \geqslant 0)$, pri čemu je smer obilaženja po konturi, posmatran iz koordinatnog početka, suprotan kretanju satne kazaljke.

Grinova formula

U zadacima 3822—3823 krivolinijske integrale po zatvorenim konturama L, uzete u pozitivnom smeru obilaženja, transformisati u dvojne integrale po oblastima, ograničenim tim konturama.

3822. $\int_L (1 - x^2)\,y\,dx + x\,(1 + y^2)\,dy$.

3823. $\int\limits_L (e^{xy}+2x\cos y)\,dx+(e^{xy}-x^2\sin y)\,dy.$

3824. Izračunati integral u zadatku 3822, ako je kontura integracije L krug $x^2+y^2=R^2$, na dva načina:

1) neposredno;

2) primenom Grinove formule.

3825. Izračunati $\int\limits_L (xy+x+y)\,dx+(xy+x-y)\,dy$, pri čemu je kontura integracije L: 1) elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) krug $x^2+y^2=ax$, a integral se uzima oba puta u pozitivnom smeru obilaženja. (Račun izvesti na dva načina: 1) neposredno, i 2) primenom Grinove formule).

3826. Dokazati da je integral $\int\limits_L (yx^3+e^y)\,dx+(xy^3+x\,e^y-2\,y)\,dy$ jednak nuli ako je putanja integracije L zatvorena kriva simetrična u odnosu na koordinatni početak.

3827. Primenom Grinove formule izračunati razliku integrala

$$I_1=\int\limits_{AmB}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy$$

i

$$I_2=\int\limits_{AnB}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy,$$

pri čemu je AmB pravolinijski odsečak koji spaja tačke $A(0,\,0)$ i $B(1,\,1)$, a AnB je luk parabole $y=x^2$.

3828. Pokazati da je vrednost integrala $\int\limits_L \{x\cos(N,\,x)+y\sin(N,\,x)\}\,dS$, u kojem je $(N,\,x)$ ugao između spoljne normale krive L i pozitivnog smera apscisne ose, uzetog u pozitivnom smeru obilaženja po zatvorenoj krivoj L, jednaka dvostrukoj površini oblasti ograničene zatvorenom krivom L.

3829. Dokazati da integral $\int\limits_L (2\,xy-y)\,dx+x^2\,dy$, uzet po zatvorenoj krivoj L, izražava površinu oblasti ograničene tom krivom.

3830. Dokazati da je integral $\int\limits_L \varphi(y)\,dx+[x\,\varphi'(y)+x^3]\,dy$ jednak trostrukom momentu inercije homogene ravne figure ograničene konturom L, u odnosu na ordinatnu osu.

Nezavisnost integrala od putanje integracije
Iznalaženje primitivne funkcije

U zadacima 3831 — 3835 uveriti se da su vrednosti datih integrala, uzetih po zatvorenim konturama, jednake nuli bez obzira na oblik funkcija koje ulaze u podintegralni izraz.

3831. $\int\limits_L \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy.$ **3832.** $\int\limits_L f(xy)\,(y\,dx + x\,dy).$

3833. $\int\limits_L f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}.$

3834. $\int\limits_L [f(x+y) + f(x-y)]\,dx + [f(x+y) - f(x-y)]\,dy.$

3835. $\int\limits_L f(x^2+y^2+z^2)\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz).$

3836*. Dokazati da integral $\int\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x+y}$, uzet u pozitivnom smeru obilaženja po bilo kojoj zatvorenoj konturi koja obuhvata koordinatni početak, ima vrednost 2π.

3837. Izračunati $\int\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + 4y^2}$ duž kruga $x^2 + y^2 = 1$ u pozitivnom smeru obilaženja.

U zadacima 3838—3844 izračunati krivolinijske integrale totalnih diferencijala.

3838. $\int\limits_{(-1,\,2)}^{(2,\,3)} y\,dx + x\,dy.$ **3839.** $\int\limits_{(0,\,0)}^{(2,\,1)} 2xy\,dx + x^2\,dy.$

3840. $\int\limits_{(3,\,4)}^{(5,\,12)} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$ (koordinatni početak ne leži na putanji integracije).

3841. $\int\limits_{(P_1)}^{(P_2)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pri čemu tačke P_1 i P_2 leže na koncentričnim krugovima čiji je zajednički centar u koordinatnom početku, a poluprečnici su im R_1 i R_2 (koordinatni početak ne leži na putanji integracije).

3842. $\int\limits_{(1,\,-1,\,2)}^{(2,\,1,\,3)} x\,dx - y^2\,dy + z\,dz.$

3843. $\int\limits_{(1,\,2,\,3)}^{(3,\,2,\,1)} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz.$

3844. $\int\limits_{(7,\,2,\,3)}^{(5,\,3,\,1)} \frac{zx\,dy + xy\,dz - yz\,dx}{(x-yz)^2}$ $\left(\text{putanja integracije ne preseca površinu } z = \frac{x}{y}\right).$

U zadacima 3845—3852 naći funkcije čiji su totalni diferencijali zadati.

3845. $du = x^2\,dx + y^2\,dy.$

3846. $du = 4(x^2 - y^2)(x\,dx - y\,dy).$

3847. $du = \dfrac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}.$

3848. $du = \dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\,dx - \left(\dfrac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy.$

3849. $du = \left[\dfrac{x-2y}{(y-x)^2} + x\right]dx + \left[\dfrac{y}{(y-x)^2} - y^2\right]dy.$

3850. $du = (2x\cos y - y^2\sin x)\,dx + (2y\cos x - x^2\sin y)\,dy.$

3851. $du = \dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \left(\dfrac{e^y}{1+x^2} + 1\right)dy.$

3852. $du = \dfrac{(3y-x)\,dx + (y-3x)\,dy}{(x+y)^3}.$

3853. Odrediti broj n tako da izraz $\dfrac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{(x^2+y^2)^n}$ bude totalni diferencijal, i naći odgovarajuću primitivnu funkciju.

3854. Odrediti konstante a i b tako da izraz

$$\frac{(y^2+2xy+ax^2)\,dx - (x^2+2xy+by^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

bude totalan diferencijal, i naći odgovarajuću primitivnu funkciju.

U zadacima 3855 — 3860 naći funkcije čiji su totalni diferencijali zadati.

3855. $du = \dfrac{dx+dy+dz}{x+y+z}.$ **3856.** $du = \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

3857. $du = \dfrac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1+x^2y^2z^2}.$

3858. $du = \dfrac{2(zx\,dy + xy\,dz - yz\,dx)}{(x-yz)^2}.$

3859. $du = \dfrac{dx - 3\,dy}{z} + \dfrac{3y - x + z^3}{z^2}\,dz.$

3860. $du = e^{\frac{y}{z}}\,dx + \left(\dfrac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)}{z} + ze^{yz}\right)dy + \left(-\dfrac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)\,y}{z^2} + ye^{yz} + e^{-z}\right)dz.$

Primena integrala

U zadacima 3861 — 3868 pomoću krivolinijskog integrala izračunati površinu oblasti ograničene datim zatvorenim krivama.

3861. Elipsom $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

3862. Astroidom $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

3863. Kardioidom $x=2a\cos t-a\cos 2t$, $y=2a\sin t-a\sin 2t$.

3864*. Petljom dekartova lista $x^3+y^3-3axy=0$.

3865. Petljom krive $(x+y)^3=xy$.

3866. Petljom krive $(x+y)^4=x^2y$.

3867*. Bernulijevom lemniskatom $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

3868. Petljom krive $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{12}=xy$.

Mehanički rad

3869. U svakoj tački ravni na materijalnu tačku dejstvuje konstantna sila $\boldsymbol{F}=F\,\boldsymbol{i}$; izračunati rad koji izvrši ova sila pri pomeranju tačke duž kružnog luka $x^2+y^2=R^2$ koji leži u I kvadrantu.

3870. U svakoj tački ravni na materijalnu tačku dejstvuje sila $\boldsymbol{F}$ čije su projekcije X i Y na koordinatne ose: $X=xy$, $Y=x+y$. Izračunati rad sile $\boldsymbol{F}$ pri pomeranju tačke iz koordinatnog početka u tačku (1, 1): 1) duž prave $y=x$; 2) duž parabole $y=x^2$; 3) duž izlomljene linije čiji su delovi paralelni koordinatnim osama (dve mogućnosti).

3871. U svakoj tački M elipse $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ dejstvuje sila $\boldsymbol{F}$, čiji je intenzitet jednak odstojanju tačke M od centra elipse i usmerena je ka centru elipse. a) Izračunati rad sile $\boldsymbol{F}$ pri pomeranju tačke duž luka elipse koji leži u prvom kvadrantu; b) Izračunati rad na celoj eliptičnoj putanji.

3872. Projekcije sile na koordinatne ose date su obrascima: $X=2xy$, $Y=x^2$. Pokazati da rad sile pri pomeranju tačke zavisi samo od njenog početnog i krajnjeg položaja, a ne i od oblika putanje. Izračunati veličinu rada pri pomeranju od tačke (1, 0) do tačke (0, 3).

3873. Sila je usmerena prema koordinatnom početku, a intezitet joj je obrnuto proporcionalan odstojanju njene napadne tačke od ravni xOy. Izračunati rad koji se izvrši pod dejstvom ove sile pri pomeranju tačke duž prave $x=at$, $y=bt$, $z=ct$ od tačke $M(a, b, c)$ do tačke $N(2a, 2b, 2c)$.

3874. Sila je normalna na z-osu i usmerena prema njoj, a intezitet joj je obrnuto proporcionalan odstojanju napadne tačke od z-ose. Izračunati rad koji se izvrši pod dejstvom ove sile pri pomeranju tačke duž kruga $x=\cos t$, $y=1$, $z=\sin t$ od tačke $M(1, 1, 0)$ do tačke $N(0, 1, 1)$.

3875. Ako se jedna od dve tačkaste mase, između kojih dejstvuje gravitaciona sila, pomera u polju dejstva te sile, pokazati da rad gravitacione sile pri tom pomeranju ne zavisi od oblika puta. Po Njutnovom zakonu je intenzitet F gravitacione sile dat obrascem: $F=\dfrac{km_1m_2}{r^2}$, u kojem je r rastojanje između tačaka, m_1 i m_2 — mase koncentrisane u tim tačkama, a k — gravitaciona konstanta.

3888. $\iint\limits_S x^2y^2z\,dx\,dy$ po spoljnoj strani donje polovine sfere x^2+y^2+ $+z^2=R^2$.

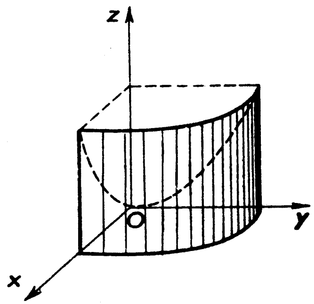
3889. $\iint\limits_S z\,dx\,dy$ po spoljnoj strani elipsoida $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

3890. $\iint\limits_S z^2\,dx\,dy$ po spoljnoj strani elipsoida $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

3891. $\iint\limits_S xz\,dx\,dy+xy\,dy\,dz+yz\,dx\,dz$ po spoljnoj strani piramide obrazovane ravnima $x=0$, $y=0$, $z=0$ i $x+y+z=1$.

3892. $\iint\limits_S yz\,dx\,dy+xz\,dy\,dz+xy\,dx\,dz$ po spoljnoj strani zatvorene površine koja se nalazi u prvom oktantu a sastoji se iz dela cilindra $x^2+y^2=R^2$ i odgovarajućih delova ravni $x=0$, $y=0$, $z=0$ i $z=H$.

3893. $\iint\limits_S y^2z\,dx\,dy+xz\,dy\,dz+x^2y\,dx\,dz$ po spoljnoj strani zatvorene površine koja se nalazi u prvom oktantu a sastoji se iz obrtnog paraboloida $z=x^2+y^2$, cilindra $x^2+y^2=1$ i odgovarajućih delova koordinatnih ravni (sl. 68).



Sl. 68

Štoksova formula

3894. Integral $\int\limits_L (y^2+z^2)\,dx+(x^2+z^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$, uzet po nekoj zatvorenoj konturi L, primenom Štoksove formule transformisati u integral po površini „razapetoj“ nad tom konturom.

3895. Izračunati integral $\int\limits_L x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$ po krugu $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, na dva načina: a) neposredno, i b) koristeći Štoksovu formulu, uzimajući za površinu S polusferu $z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. (Integracija po krugu u ravni xOy računa se u pozitivnom smeru obilaženja).

Formula Ostrogradskog

3896. Površinski integral $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dx\,dz+z^2\,dx\,dy$, uzet po zatvorenoj površini S, primenom formule Ostrogradskog, transformisati u trojni integral po zapremini ograničenoj tom površinom (Integral se računa po spoljnoj strani površine S).

3897. Površinski integral $\iint\limits_S x^2+y^2+z^2\{\cos(N,x)+\cos(N,y)+\cos(N,z)\}d\sigma$ po zatvorenoj površini S, primenom formule Ostrogradskog transformisati u trojni integral po zapremini ograničenoj tom površinom, pri čemu je N spoljna normala površine S.

3898. Izračunati integral u prethodnom zadatku ako je S sfera poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku.

3899. Izračunati integral

$$\iint_S [x^3 \cos(N, x) + y^3 \cos(N, y) + z^3 \cos(N, z)]\, d\sigma,$$

u kojem je S — sfera poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku, a N — spoljna normala.

3900. Izračunati integral u zadacima 3891—3863 primenom formule Ostrogradskog.

(Ova stranica je ostavljena prazna)

REZULTATI

3770. $\sqrt{5}\ln 2$. **3771.** 24. **3772.** $\frac{p^2}{3}(5\sqrt{5}-1)$. **3773.** $2\pi a^{2n+1}$.

3774. $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. **3775.** $4\pi a\sqrt{a}$.

3776. $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi.$

3777*. $\frac{\pi a^2}{2}$. Preći na polarne koordinate.

3778. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. 3779. $\frac{1}{12}[(R^2+4)^{\frac{3}{2}}-8]$. 3780. $\frac{8a\pi^2\sqrt{2}}{3}$.

3781. $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$ 3782. $\frac{2\sqrt{2}}{3}[(1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1]$. 3783. $R^2\sqrt{2}$.

3784. $\frac{1}{3}\{(x_2^2+1)^{\frac{3}{2}}-(x_1^2+1)^{\frac{3}{2}}\}$. 3785. $8a$.

3786. $\frac{b^2}{2}+\frac{ab}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon$, gde je ε ekscentricitet elipse.

3787. $\left(2\pi a^2+\frac{8\pi^3 b^2}{3}\right)\sqrt{a^2+b^2}$. 3788. $(1-e^{-t})\sqrt{3}$.

3789. $\left(0, \frac{2a}{\pi}, \frac{b\pi}{2}\right)$. 3790. $\frac{8k\sqrt{2}}{15}[(3\pi^2-1)(2\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}+1]$.

3791. $I_x=I_y=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$, $I_z=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$.

3792. $3\pi R^2$. 3793. $\frac{\pi p^2}{4}$. 3794. $\frac{11}{3}$. 3795. R^2.

3796. $ka\left(a+\frac{b^2}{2c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right)$, gde je $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Za $a=b$ $S=2ka^2$.

3797. $\frac{98}{81}p^2$. 3798. $8R^2$. 3799. $4R^2$. 3800. $\frac{2Im}{a}$. 3801. $\frac{8mI\sqrt{2}}{a}$.

3803. $\frac{2\pi mIa}{b^2}$, gde su a i b—poluose elipse. 3804. $\frac{2\pi mI}{p}$.

3805. $\frac{2\pi mIR^2}{(h^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$. Za $R=h\sqrt{2}$. 3806. 3. 3807. $\frac{ab}{2}$. 3808. $-\frac{56}{15}$.

3809. $37\frac{1}{3}$. 3810. 4π. 3811. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{17}{30}$; 4) $-\frac{1}{20}$.

3812. U sva četiri slučaja vrednost integrala je 1.

3813. 0. 3814. $-2\pi ab$. 3815. $\frac{4}{3}a$. 3816. πa^2. 3817. $\frac{3}{16}\pi R\sqrt[3]{R}$

3818. 13. 3819. $-\frac{a\pi R^4}{2}$ 3820. $3\sqrt{3}$. 3821. $-\frac{\pi R^3}{4}$.

3822. $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$. 3823. $\iint_D (y-x)e^{xy}\,dx\,dy$. 3824. $\frac{\pi R^4}{2}$.

3825. 1) 0; 2) $-\frac{\pi a^3}{8}$. **3827.** $\frac{1}{3}$.

3836*. Primeniti Grinovu formulu na dvostruko povezanu oblast, ograničenu zatvorenom konturom L i bilo kakvim krugom čiji je centar u koordinatnom početku i koji ne preseca konturu L.

3837. π. **3838.** 8. **3839.** 4. **3840.** $\ln\frac{13}{5}$. **3841.** R_2-R_1. **3842.** $\frac{10}{3}$.

3843. 0. **3844.** $-\frac{9}{2}$. **3845.** $u=\frac{x^3+y^3}{3}+C$. **3846.** $u=(x^2-y^2)^2+C$.

3847. $u=\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}+C$. **3848.** $u=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+1}{y}+C$.

3849. $u=\ln|x-y|+\frac{y}{x-y}+\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}+C$.

3850. $u=x^2\cos y+y^2\cos x+C$. **3851.** $u=\frac{e^y-1}{1+x^2}+y+C$.

3852. $u=\frac{x-y}{(x+y)^2}+C$. **3853.** $n=1$, $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C$.

3854. $a=b=-1$, $u=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$. **3855.** $u=\ln|x+y+z|+C$.

3856. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C$. **3857.** $u=\operatorname{arctg} xyz+C$.

3858. $u=\frac{2x}{x-yz}+C$. **3859.** $u=\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}+C$.

3860. $u=e^{\frac{y}{z}}(x+1)+e^{yz}-e^{-z}$.

3861. πab. **3862.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **3863.** $6\pi a^2$.

3864*. $\frac{3}{2}a^2$. Preći na parametarske jednačine krive, stavljajući $y=tx$.

3865. $\frac{1}{60}$. **3866.** $\frac{1}{210}$. **3867*.** $2a^2$. Staviti $y=x\operatorname{tg} t$.

3868*. $\frac{1}{30}$. Staviti $y=xt^2$. **3869.** FR.

3870. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{17}{12}$; 3) $\frac{3}{2}$ i 1. **3871.** a) $\frac{a^2-b^2}{2}$; b) 0.

3872. 0. **3873.** $\frac{k\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}\ln 2$, pri čemu je k koeficijenat proporcionalnosti.

3874. $0{,}5\,k\ln 2$, pri čemu je k koeficijent proporcionalnosti.

3876. $4\sqrt{61}$. **3877.** $\frac{\sqrt{3}}{120}$. **3878.** $\frac{\pi R^3}{4}$. **3979.** 0. **3880.** πR^3. **3881.** $\frac{2\pi R^6}{15}$.

3882. $2\pi \operatorname{arctg} \frac{H}{R}$. **3883.** $\frac{2\pi R}{c(n-2)}\left[\frac{1}{(c-R)^{n-2}}-\frac{1}{(c+R)^{n-2}}\right]$ za $n \neq 2$;

$\frac{2\pi R}{c} \ln \frac{c+R}{c-R}$ za $n=2$.

3884. $\pi[R\sqrt{R^2+1}+\ln(R+\sqrt{R^2+1})]$.

3885*. $\pi^2 R^3$. Primeniti sferne koordinate.

3886. $\frac{8}{3}\pi R^4$. **3887.** 3. **3888.** $\frac{2\pi R^7}{105}$. **3889.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **3890.** 0.

3891. $\frac{1}{8}$. **3892.** $R^2 H\left(\frac{2R}{3}+\frac{\pi H}{8}\right)$. **3893.** $\frac{\pi}{8}$.

3894. $2\iint\limits_S (x-y)\,dx\,dy+(y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dx\,dz$.

3895. $-\frac{\pi R^6}{8}$. **3896.** $2\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$.

3897. $\iiint\limits_\Omega \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$. **3898.** 0. **3899.** $\frac{12}{5}\pi R^5$.